

# UN MÓBIL SOBRE UN PAPEL SOBRE UNHA MESA

GREGORIO MONTES, ANTONIO

*Catedrático xubilado; agremon2001@yahoo.es*

## Resumo

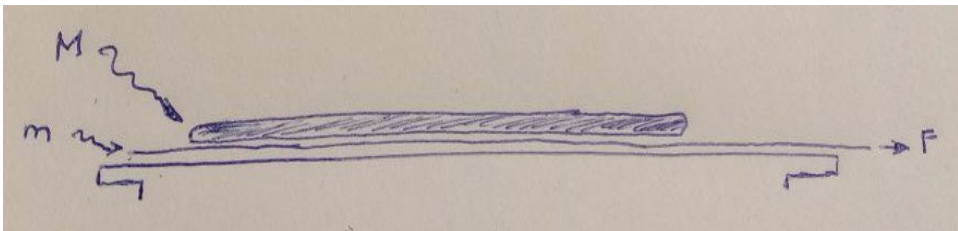
Preséntase a análise e solución sucinta dun problema de movementos con diferentes dificultades e aplicacións a nivel segundo a profundidade de tratamento.

**Palabras clave:** Rozamento, mecánica, aceleración, suma de forzas, coeficientes de rozamento.

## 1. O problema

Hai algún tempo xurdiu nunha conversa entre amigos un problema que coído que non é complicado pero necesita unha certa concentración para a súa comprensión e solución. A súa proposta pode variar abondo (veremos algunha variación), pero na súa forma máis sinxela pode ser enunciado como segue:

*Situamos un móbil sobre un papel estendido nunha mesa horizontal. Temos experiencia de poder sacar o papel dun tirón a ras de mesa, quedando o móbil sobre a mesma. Canto se move o móbil?*



**Figura 1.** Representación esquemática da situación máis sinxela

Naturalmente, a situación e os obxectos (Figura 1) están seleccionados para tentar simplificar a resposta. Simplificación que inclúe outros casos como a retirada dun mantel coa mesa posta, pero que habería que tratar con algunha variación se se trata, por exemplo, dunha mesa inclinada.

### Asignando símbolos para entendérmonos

Asignemos símbolos a varias magnitudes:

Masa móbil =  $M$

Masa papel =  $m$

$F$  = forza (horizontal) aplicada ó papel

Coef. Roz. Estático papel-mesa =  $\mu_e$

Coef. Roz. Estático móbil-papel =  $\mu_E$

Coef. Roz. Dinámico papel-mesa =  $\mu_d$

Coef. Roz. Dinámico móbil-papel =  $\mu_D$

Roz. Móbil-papel =  $R_m$

Roz. Papel-mesa =  $R_p$

## 2. Resolución teórica

Especificado o anterior, enfrontámonos a varios casos, segundo a forza que fagamos:

### Caso 1:

$$F \leq (M + m) \cdot g \cdot \mu_e$$

Nesta situación, non exercemos forza abondo para vencer o rozamento do papel (máis o móbil sobre el) coa mesa. No límite,  $F = (M + m) \cdot g \cdot \mu_e$ , a forza exercida sería igual ó rozamento, logo

- Non hai movemento.

### Caso 2:

$$F > (M + m) \cdot g \cdot \mu_e$$

Nesta situación, a forza sería superior ó rozamento estático papel-mesa, co que o conxunto papel + móbil comezaría a moverse.

Ao moverse, o rozamento que tería que vencer o papel sobre a mesa sería o dinámico, en xeral inferior ó estático, quedando unha forza efectiva  $F'$  para producir movemento de papel e móbil

$$F' = F - R_p = F - (M + m) \cdot g \cdot \mu_d$$

Neste caso, temos dúas posibilidades:

#### Posibilidade 2a:

$$F' \leq (M + m) \cdot g \cdot \mu_E$$

Nesta posibilidade, a  $F$ , despois de descontado o rozamento papel-mesa, pode comunicar aínda ó conxunto papel + móbil unha aceleración  $a_{pm} = \frac{F'}{M+m}$ , aceleración coa que se moverán ambos conxuntamente, pois a forza que actúa sobre o móbil ( $F''$ ) será proporcional á masa do mesmo, e inferior ó rozamento estático límite entre móbil e papel.

$$F'' = \frac{M}{M+m} F' < M \cdot g \cdot \mu_E$$

**Posibilidade 2b:**

$$F' > (M + m) \cdot g \cdot \mu_E$$

Nesta posibilidade, a forza transmitida polo papel ao móbil (considerando proporcionalidade en relación ás masas) superaría a forza de rozamento estático, co que o papel non daría transmitido ó móbil a forza abonda para manter o seu ritmo de aceleración, e comezaría a haber un movemento entre ambos obxectos. Entraría en xogo o coeficiente de rozamento dinámico non só para o contacto papel-mesa, senón tamén para o móbil-papel. É dicir, a máxima forza que o papel é capaz de transmitirle ó móbil, en diante, é a forza de rozamento dinámico,  $F'' = M \cdot g \cdot \mu_D$

Dese xeito, a forza que move o papel será  $F_p = F - R_p - R_m = F - (M + m) \cdot g \cdot \mu_d - M \cdot g \cdot \mu_D$ , e a aceleración do papel en relación á mesa,

$$a_p = \frac{F - R_p - R_m}{m} = \frac{F - (M + m) \cdot g \cdot \mu_d - M \cdot g \cdot \mu_D}{m}$$

De igual xeito, a forza que move o móbil sobre o papel (pero en relación á mesa, sistema de referencia) é  $F'' = M \cdot g \cdot \mu_D$  e a aceleración do móbil (en relación á mesa) será

$$a_M = \frac{F''}{M} = \frac{M \cdot g \cdot \mu_D}{M} < a_p$$

**3. Un exemplo numérico**

Poñendo números, se temos un papel de  $m = 0,0001$  kg e un móbil de  $M = 0,2$  kg, con

Coef. Roz. Estático papel-mesa =  $\mu_e = 0,5$

Coef. Roz. Estático móbil-papel =  $\mu_E = 0,6$

Coef. Roz. Dinámico papel-mesa =  $\mu_d = 0,3$

Coef. Roz. Dinámico móbil-papel =  $\mu_D = 0,4$

Obtemos que tirando do papel cunha forza menor ou igual a  $F = (0,2 + 0,0001) \cdot 9,8 \cdot 0,5 \approx 0,98N$  o conxunto non se movería.

Aplicando forza F maior que esa, pero  $F < (M + m) \cdot g \cdot \mu_d + (M + m) \cdot g \cdot \mu_E = 0,2001 \cdot 9,8 \cdot 0,9 \approx 1,764N$ , o conxunto papel-móbil moveríase cunha aceleración  $a_{pm} = \frac{F'}{M+m} = \frac{F - 0,2001 \cdot 9,8 \cdot 0,3}{0,2001} \approx \frac{F - 0,588}{0,2001} m \cdot s^{-2}$

Cunha forza aínda maior, o móbil moveríase cunha acelera =  $g \cdot \mu_D = 3,98m \cdot s^{-2}$  acción mentres o papel o faría con  $a_p = \frac{(F - 0,2001 \cdot 9,8 \cdot 0,3 - 0,2 \cdot 9,8 \cdot 0,4)}{0,0001} m \cdot s^{-2}$ . É dicir, a pouco que aumente F, cunha aceleración moito maior ca o móbil.

Hai que fixarse que, chegados a este punto, o móbil non acelera máis, mentres que o papel ten aceleracións moi diferentes a pouco que varíe a forza a el comunicada. Comparemos as aceleracións que sofre o papel ó serlle comunicada ó conxunto anterior unha forza de 1,8 N ou outra só un pouco maior, de 1,85 N: a diferenza entre ambas é de  $\Delta a_p = \frac{0,05}{0,0001} = 500m \cdot s^{-2}$ !

Supoñendo que a forza é aplicada durante 0,1 s, e que hai lonxitude de papel e mesa abondo, teríamos un espazo recorrido total do móbil de  $e = \frac{1}{2} \cdot 3,98 \cdot 0,01 = 0,0199m$ . É dicir, menos de 2

cm. En cambio, só o que incrementaría o valor do desprazamento do papel entre os casos de 1,8 N e de 1,85 N sería  $d = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 0,01 = 2,5m$ , isto é, unha distancia 250 veces a recorrida polo móbil.

#### **4. Esbozando a solución dalgunha variación posible**

Variacións do anterior, xeneralizacións, incluírían un plano inclinado ou que a forza aplicada non estea exactamente no plano da mesa.

Para dar solución ao primeiro dos dous casos anteriores, teríamos que considerar: 1) en canto ao cálculo dos rozamentos o coseno do ángulo de inclinación da mesa, e 2) en canto ao balance de forzas, as forzas 'plano abaixo' dos pesos dos obxectos polo seno do ángulo.

A segunda das xeneralizacións propostas sería na práctica abondo máis dificultosa de tratar, xa que a compoñente vertical da forza aplicada non se distribúe de xeito uniforme sobre o papel e o móbil.

#### **5. O traballo, na aula: alguna consideración**

Mentres a presentación que se pode facer do estudo é moi variable, como amosa o poder reproducilo nunha experiencia dun móbil a un prato, ou de papel a mantel de tea, o uso deste traballo na aula encaixado no programa vese naturalmente constrinxido pola propia programación. Así, dentro dela, pode enfocarse ós niveis máis elevados de estudo de rozamentos, sendo capaz de ilustrar todos os casos posibles.

Mais, independentemente do anterior, na materia de proxectos, pode usarse como base para facer un proxecto explicativo e que relacione os rozamentos e as demostracións de 'habilidade' do tipo de retirar un mantel sen que caian as cousas que están sobre el.