MOVEMENTOS NO PLANO E MOSAICOS CON PROGRAMAS DE XEOMETRÍA DINÁMICA

GONZÁLEZ OGANDO, PAULO
IES Johan Carballeira, Bueu (Pontevedra)
paulo.glez.ogando@gmail.com

RESUMO: Neste artigo propóñense algunhas tarefas para traballar os movementos no plano na materia de Matemáticas de 3º ESO. A actividade está artellada en torno aos mosaicos e as teselas básicas coas que se constrúen, e contextualizada a partir das mostras que se poden atopar na Alhambra, enlazando deste xeito cunha das competencias clave que menos se adoita traballar nesta materia, a relacionada coa conciencia e as expresións culturais.

O groso da actividade suxerida está baseado na utilización de dous programas de xeometría dinámica que están dispoñibles en liña, son *software* libre, bastante doados de manexar e non requiren de realizar rexistro ningún: Mathigon e GeoGebra.

PALABRAS CLAVE: movementos, mosaicos, geogebra, mathigon, alhambra.

1. Introdución e xustificación

O currículo da Educación Secundaria Obrigatoria (ESO)[1] vertébrase a partir do perfil de saída do alumnado ao finalizar o ensino básico. Para chegar até aí defínense uns obxectivos en matemáticas cunhas liñas principais baseadas nas destrezas socioafectivas e a resolución de problemas. Coa presente actividade preténdese traballar, fundamentalmente, en relación cos obxectivos vinculados ao establecemento de conexións e á comunicación e representación.

A normativa marca que o alcance deses obxectivos se mide a través dos criterios de avaliación e se leva a cabo mediante a mobilización dun conxunto de contidos que integran coñecementos, destrezas e actitudes. Ante o deseño dunha actividade como a que aquí se presenta débese, por tanto, analizar cales destes se van poñer en marcha. No terceiro curso da ESO, no bloque 3 do sentido espacial, aparecen contidos relacionados coa xeometría dos movementos do plano, que deben permitir avaliar as accións que comporta o desempeño descrito por algúns dos criterios de avaliación que consigna o currículo que están en relación cos obxectivos da materia (táboa 1).

[1]https://www.xunta.gal/dog/Publicados/2022/20220926/AnuncioG0655-190922-0002_gl.html

Táboa 1. *Contidos, criterios de avaliación e obxectivos que mobiliza esta actividade.*

<table>
<tr><th colspan="6">Contidos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Figuras xeométricas de dúas e tres dimensións.
Construción de figuras xeométricas con ferramentas manipulativas e dixitais, como programas de xeometría dinámica, realidade aumentada etc.</td><td colspan="2">Movementos e transformacións.
Análise de transformacións elementais, como xiros, translacións e simetrías en situacións diversas utilizando ferramentas tecnolóxicas e/ou manipulativas.</td><td colspan="2">Visualización, razoamento e modelización xeométrica.
Relacións xeométricas: investigación en diversos sentidos (numérico, alxébrico, analítico) e diversos campos (arte, ciencia, vida diaria).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Crenzas, actitudes e emocións.
Fomento da curiosidade, da iniciativa, da perseveranza e da resiliencia cara á aprendizaxe das matemáticas.</td><td colspan="3">Inclusión, respecto e diversidade.
Promoción de actitudes inclusivas e aceptación da diversidade presente na aula e na sociedade.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Criterios de avaliación</th><th colspan="3">Obxectivos</th></tr>
<tr><td colspan="3">CA3.3. Realizar conexións entre diferentes procesos matemáticos aplicando coñecementos e experiencias.</td><td colspan="3">OBX5. Recoñecer e utilizar conexións entre os diferentes elementos matemáticos interconectando conceptos e procedementos para desenvolver unha visión das matemáticas como un todo integrado.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CA3.4. Recoñecer situacións susceptibles de ser formuladas e resoltas mediante ferramentas e estratexias matemáticas, establecendo e aplicando conexións entre o mundo real e as matemáticas e usando os procesos inherentes á investigación científica e matemática: inferir, medir, comunicar, clasificar e predicir.</td><td colspan="3" rowspan="3">OBX6. Identificar as matemáticas implicadas noutras materias e en situacións reais susceptibles de ser abordadas en termos matemáticos, interrelacionando conceptos e procedementos para aplicalos en situacións diversas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CA3.5. Identificar conexións coherentes entre as matemáticas e outras materias recoñecendo a achega das matemáticas ao progreso da humanidade.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CA6.1. Recoñecer a achega das matemáticas ao progreso da humanidade e a súa contribución á superación dos retos que demanda a sociedade actual.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CA3.6. Representar conceptos, procedementos e resultados matemáticos usando diferentes ferramentas e valorando a súa utilidade para compartir información.</td><td colspan="3">OBX7. Representar, de forma individual e colectiva, conceptos, procedementos, información e resultados matemáticos usando diferentes tecnoloxías, para visualizar ideas e estruturar procesos matemáticos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CA6.3. Mostrar unha actitude positiva e perseverante, aceptando a crítica razoada ao facer fronte ás diferentes situacións de aprendizaxe das matemáticas.</td><td colspan="3">OBX9. Desenvolver destrezas persoais identificando e xestionando emocións, poñendo en práctica estratexias de aceptación do erro como parte do proceso de aprendizaxe e adaptándose ante situacións de incerteza para mellorar a perseveranza na consecución de obxectivos e o gozo na aprendizaxe das matemáticas.</td></tr>
</table>

A Alhambra, situada en Granada, é un conxunto de palacios, xardíns e fortaleza que foi declarada Patrimonio da Humanidade en 1984. Trátase dun complexo monumental onde se aloxaba a corte do Reino nazarí, e está dotada dunha beleza extraordinaria. Unha característica innegable da Alhambra é que foi construída con mirada xeométrica, xa que contén diversas marabillas de carácter matemático (Fernández, 2021). Entre estas atópase magnificamente representada unha variada mostra de mosaicos (figura 1), que imos aproveitar para elaborar unha actividade que permita traballar os aspectos recollidos na táboa 1.

Figura 1. *Algúns mosaicos que se atopan na Alhambra. Fonte:* [*https://matematicasentumundo.es/FOTOGRAFIAS/fotografia_mosaicos_alhambra.htm*](https://matematicasentumundo.es/FOTOGRAFIAS/fotografia_mosaicos_alhambra.htm).

Dise que un mosaico é unha composición xeométrica que permite recubrir todo o plano sen deixar ocos e sen solapamentos. Só exiten 17 grupos cristalográficos planos (Schwarzenberger, 1974), é dicir 17 estruturas básicas para as infinitas decoracións posibles con mosaicos periódicos. Durante algún tempo existiu un debate sobre o número de grupos presentes nos mosaicos da Alhambra; finalmente a discusión pechouse cando, tras unha exhaustiva busca, se atoparon representacións xeométricas de todos e cada un dos 17 modelos posibles (Pérez, 2004).

A elaboración dun mosaico consiste no uso dunha tesela establecida como unidade, que é o motivo básico que se estende para formar o mosaico mediante as transformacións do grupo cristalográfico correspondente. Esa tesela básica parte dun polígono simple no cal se atopa o deseño mínimo preciso para reproducir o mosaico completo; esas rexións xeratrices poden ser triángulos, cuadriláteros ou hexágonos.

As teselas que se obteñen mediante transformacións elementais a partir deses polígonos, que logo foron usadas para elaborar os mosaicos da Alhambra, reciben nomes alusivos á súa forma tales coma 'escama', 'paxariña', 'oso' ou 'peixe voador' (figura 2).

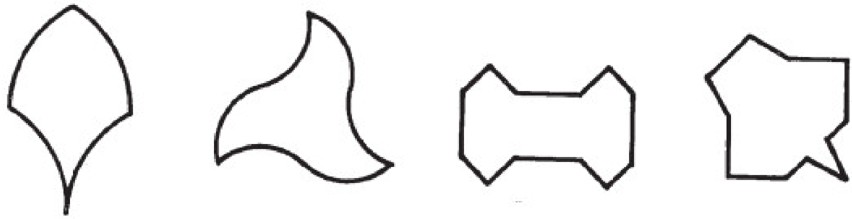

Figura 2. *Algunhas teselas presentes na Alhambra. Fonte: Hernández (2010).*

O uso da arte como recurso didáctico contribúe á adquisición da competencia relacionada coa conciencia e as expresións culturais, que a lei de educación describe como unha das competencias clave[2]. Ao mesmo tempo, actividades deste estilo corroboran a importancia das matemáticas de cara a realizar unha correcta interpretación e comprensión do entorno que nos rodea. E permiten tamén a integración e implementación das TIC para realizar un tratamento dinámico da xeometría, que facilita a adquisición significativa dos razoamentos empregados e favorece a capacidade de visualización.

Con esas características presentes, os obxectivos didácticos principais desta proposta poden resumirse en:

- Apreciar na arte fenómenos que se poidan analizar e describir mediante a xeometría.
- Identificar os distintos movementos no plano.
- Aplicar translacións, simetrías e xiros a unha figura dada.
- Coñecer as características que determinan un mosaico.
- Utilizar programas de xeometría dinámica para realizar transformacións xeométricas e elaborar teselas e mosaicos.

2. Comezando a investigar con Mathigon

A actividade comeza co uso da páxina *web* interactiva Mathigon. Aínda que é posible que tanto o profesorado coma o alumnado se rexistre na páxina (o cal permite asignar tarefas xa elaboradas ou que cadaquén garde o seu traballo), tal requirimento non é necesario se non se quere engadir unha complicación extra debido á obriga de manexar axeitadamente as contas e os datos persoais do alumnado.

Na proposta que aquí traio o uso de Mathigon non leva a ningunha produción final, serve unicamente como punto de arranque para establecer unhas cantas hipóteses iniciais, e por tanto non é preciso realizar previamente o rexistro na páxina.

Mathigon ofrece bastantes posibilidades, pero imos quedar co manipulador virtual Polypad[3]. Con esta ferramenta resulta moi doado elaborar mosaicos, e a primeira actividade da tarefa consiste en pedir ao alumnado que produza os seus propios mosaicos, explicando as condicións de non

[2]Recordémolas en https://educagob.educacionyfp.gob.es/curriculo/curriculo-lomloe/menu-curriculos-basicos/ed-secundaria-obligatoria/competencias-clave.html.

[3]Accesible en https://es.mathigon.org/polypad.

teren ocos nin superposicións.

A plataforma xa ofrece uns cantos modelos de tesela básica, coma o papaventos e o dardo de Penrose (figura 3) ou varios pentágonos diferentes (figura 4). O alumnado tan só ten que xirar ou voltear cada copia da figura, para despois arrastrala co rato e colocala de forma que vaia construíndo o mosaico. É moi sinxelo e axiña todo o mundo o manexa sen problema.

Figura 3. *O papaventos e o dardo de Penrose.*

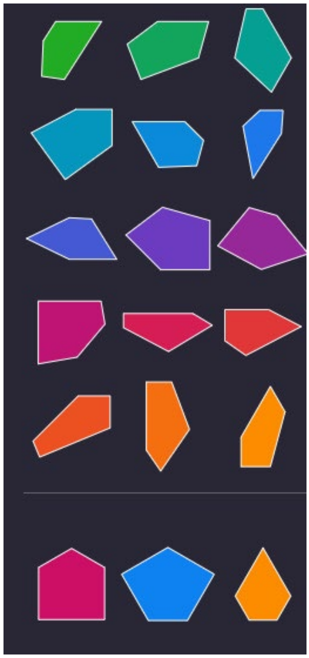

Figura 4. *Os pentágonos que ofrece o Polypad.*

Segundo se van construíndo mosaicos, tamén se pide ao alumnado que reflicta no caderno os distintos tipos de movemento que vai aplicando (translación, simetría, xiro). A guía do profesorado é necesaria nese proceso para ir recomendando unha ou outra figura, de xeito que todo o alumnado recoñeza todos os tipos, e tamén para apoiar co recoñecemento de cada tipo e das súas características: por exemplo, que apunten o ángulo de xiro, ou tamén que hai xente á que lle custa máis recoñecer as simetrías, e incluso existe quen dá por obvia a translación e non a identifica como movemento sen axuda.

Esta parte inicial da actividade ten como obxectivo realizar un primeiro achegamento aos movementos de forma dinámica. Como se trata de recoñecer e apuntar conceptos básicos, é recomendable que se realice en grupos de dous ou tres estudantes, para que se xere certo debate e as achegas individuais conflúan nun primeiro feixe de hipóteses. É tamén aconsellable que unha vez que todo o mundo produciu algúns mosaicos, se prepare unha posta en común de todo o grupo e coa moderación do profesorado, que se ocupará de conducila cara unha exposición detallada e exhaustiva dos tipos de movementos e as súas características, completándoa se fose necesario.

3. Algunhas actividades en papel

Tras ter feito unhas cantas probas co Polypad de Mathigon, lánzase unha pregunta do tipo <<non che chamou a atención que entre todos pentágonos que ofrece... ningún sexa o pentágono

regular?>> e pídese que se establezan conxecturas sobre se se pode teselar o plano empregando unicamente un pentágono regular, e con que polígonos regulares é iso posible. Isto dá pé a completar un exercicio coma o da táboa 2, para o cal se debe introducir -de non ser coñecido con antelación- o procedemento de triangularización dun polígono.

Táboa 2. *Un pequeno estudo sobre polígonos regulares.*

Polígono regular	N.º de lados	N.º de triángulos	Suma dos ángulos interiores	Valor do ángulo interior
Triángulo equilátero	3	1	$1 \cdot 180º$	$\frac{180º}{3} = 60º$
Cadrado	4	2	$2 \cdot 180º$	$\frac{360º}{4} = 90º$
Pentágono	5			
Hexágono	6			
Polígono de *n* lados	*n*			

Unha vez recollidos estes datos, é sinxelo reconducir o debate cara os mosaicos regulares, que son aqueles formados por un único polígono regular, facendo ver que arredor dun vértice se teñen que xuntar un número enteiro de polígonos iguais, e dese xeito só se consegue sumar 360º no caso dos triángulos, dos cadrados ou dos hexágonos regulares.

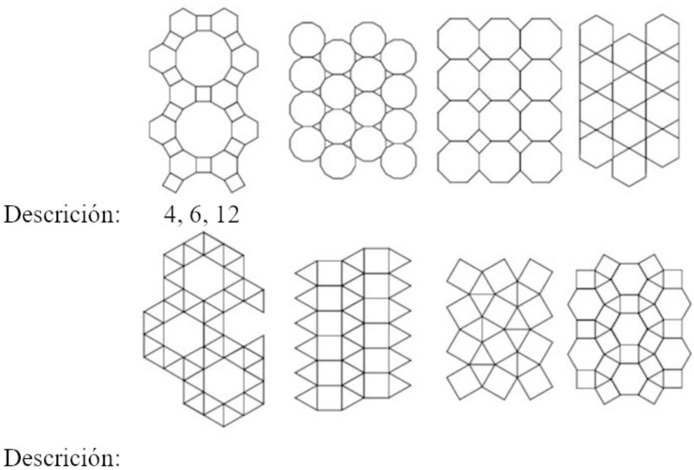

Figura 5. *Os oito mosaicos semirregulares. Fonte: Wolfram MathWorld.*

Outra posibilidade existente é a dos mosaicos semirregulares, aqueles nos que se permite o uso de varios polígonos regulares, co engadido de que en todos os vértices debe incidir a mesma configuración de polígonos. Só existen oito mosaicos desta caste (figura 5), e un exercicio interesante consiste en poñer por escrito unha listaxe das oito estruturas, para o cal se usa unha codificación na que se indica o número de lados de cada polígono regular que, por orde, conflúe nun vértice. Por exemplo, o mosaico superior esquerdo da figura 5 é o (4,6,12), pois arredor de cada vértice hai un cadrado, un hexágono regular e un dodecágono regular.

Os mosaicos regulares e os semirregulares son os máis fáciles de obter, pero a clasificación dos mosaicos é máis extensa, e fálase por exemplo de mosaicos demirregulares -formados por polígonos regulares, pero sen a esixencia de teren igual configuración arredor de todos os vértices; hai 14 tipos (poden verse en Critchlow, 1970)-, ou tamén de mosaicos modulares -aqueles nos que a un polígono regular se lle fai unha pequena transformación para obter teselas de formas diferentes-.

Son precisamente os mosaicos modulares os que aparecen espallados na Alhambra, e aos que prestaremos atención no apartado seguinte, e son tamén modulares os mosaicos que permitiron ao artista Maurits Cornelius Escher (2016) xerar fermosísimas obras baseadas no seu dominio da simetría e a xeometría.

4. Elaborando mosaicos da Alhambra con Geogebra

A estas alturas creo que xa non fai falla presentar o programa GeoGebra, coñecido pola práctica totalidade do profesorado de Matemáticas. Tomo prestadas as palabras de Agustín Carrillo (2012) cando escribe <<GeoGebra no es solo geometría (Geo), al menos como su nombre indica también es álgebra (Gebra), aunque la realidad es más, es cálculo, es análisis y también estadística; en definitiva GeoGebra supone una excelente opción para hacer unas matemáticas dinámicas sobre todo en los niveles educativos de Primaria, Secundaria y también Bachillerato>>. Non podo estar máis de acordo, e na actualidade non concibo o meu labor docente sen o apoio de GeoGebra.

Este programa permite un tratamento da xeometría non só dinámico senón tamén accesible, cunha curva de aprendizaxe bastante curta o alumnado xa é quen de sacarlle partido. No que toca a este artigo, GeoGebra permite elaborar mosaicos creando a tesela básica e aplicándolle a continuación translacións, xiros e/ou simetrías, os tres movementos para os que GeoGebra incorpora cadansúa ferramenta específica. E dada a potencia do programa, a creación da tesela só encontra límites na creatividade e os coñecementos xeométricos de cadaquén.

No ano 2020, ademais, o equipo de GeoGebra implementou a ferramenta educativa GeoGebra Classroom[4]. O seu uso pode resultar de gran interese para tarefas como as que aquí explico, pois por un lado permite ao profesorado monitorear o progreso de todos os estudantes, que se actualiza en tempo real, e por outra banda é un cartafol no que gardar as producións elaboradas polo alumnado.

Xa se fixo notar no apartado anterior que os mosaicos que decoran a Alhambra son de tipo modular; é preciso construír inicialmente a tesela básica partindo dun polígono regular. De entre todos os exemplares que poderiamos utilizar para os nosos obxectivos, imos construír o oso (figura 2), que dá lugar a un mosaico tan fermoso coma o da figura 6.

[4]Un titorial do GeoGebra Classroom pode consultarse en https://www.geogebra.org/m/fstbrmvt.

Figura 6. *Mosaico da Alhambra formado pola tesela con forma de oso. Fonte:* *https://matematicasentumundo.es/FOTOGRAFIAS/fotografia_mosaicos_alhambra.htm*.

O oso obtense por transformación a partir dun cadrado. Ao alumnado ofréceselle unha guía co resultado final aproximado que debe obter (figura 7) e un esquema dos pasos que debe seguir, como podería ser o seguinte:

- Constrúe un cadrado e traza as súas diagonais.
- Marca o punto medio do lado inferior do cadrado.
- Traza as dúas mediatrices entre ese punto medio e os extremos que o definen.
- Marca os catro puntos que intersecan as ditas mediatrices coas diagonais.
- Marca catro novos puntos que serán os simétricos dos do paso anterior respecto dos lados do cadrado.
- Debuxa un polígono que forme o oso.

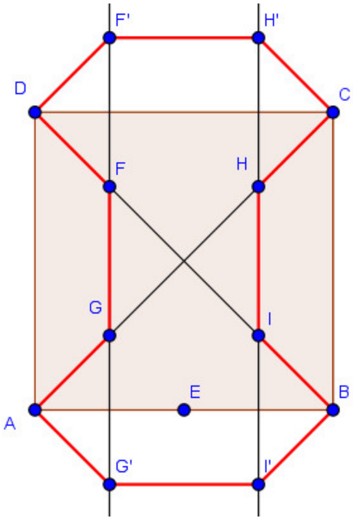

Figura 7. *O oso debe quedar tal que así.*

Unha vez obtido o motivo básico, o oso, cómpre modificar ao gusto de cadaquén a cor e a opacidade do polígono que o forma, así como ocultar -que non borrar- os elementos auxiliares: o cadrado orixinal, as rectas e segmentos e todos os puntos salvo os catro que definían o cadrado (que se van utilizar como referencia na elaboración do mosaico). Eses catro puntos e o oso serán o único que permaneza á vista.

A actividade avanza enchendo o plano de forma progresiva con copias e máis copias do oso. Tal e como se ve na figura 6, é preciso contar con copias en vertical e con copias en horizontal. As cores non son importantes, e nese aspecto a min gústame conceder espazo para a creatividade do alumnado, pero como elaboramos un oso vertical, hai que obter outro horizontal a partir del. Isto resulta tan doado como empregar a ferramenta correspondente de GeoGebra para realizar un xiro de 90º arredor dun dos vértices do cadrado, que para iso deixaramos desmarcados.

Unha vez contamos xa cun modelo vertical e outro horizontal, é aconsellable trocar a cor e/ou a opacidade dun deles; de seren as mesmas, tal e como se elaborou a construción coas explicacións anteriores non se distinguirán unhas teselas das outras. E ademais, buscamos un resultado colorido, lémbrese que estamos tomando como modelo o exquisito gusto empregado na Alhambra.

A partir de aquí o mosaico constrúese realizando sucesivas translacións ou xiros. Unha última cuestión da que se pode sacar partido é que o alumando conxecture e comprobe cales son os movementos que lle permitirían completar o mosaico: as direccións que podería empregar nas translacións, os ángulos e os centros a usar nos xiros e a posibilidade de empregar simetrías. Esta pregunta podería complementarse mostrando outros mosaicos da Alhambra e inquirindo que sexa capaz de atopar algún exemplo de cada caste.

Por cada mosaico existente na Alhambra temos a posibilidade de deseñar unha actividade de corte semellante, aínda que se lle poden engadir pequenas variantes. Tras ter xa traballado tanto os aspectos teóricos correspondentes aos movementos coma os aspectos técnicos relativos ao GeoGebra, por exemplo pode pedirse que sexa o propio alumnado quen recoñeza os pasos que conforman a guía de elaboración da tesela básica, ou deixando vía libre para que os propios estudantes procuren construír o mosaico empregando os movementos que se lles ocorra.

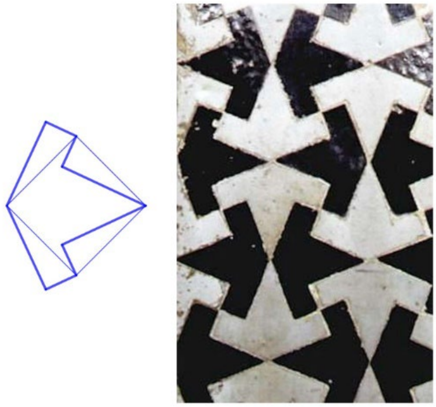

Figura 8. *O avión, tesela básica e mosaico da Alhambra. Fonte do mosaico: https://matematicasentumundo.es/FOTOGRAFIAS/fotografia_mosaicos_alhambra.htm.*

O que eu adoito facer é mostrar unha imaxe como a da figura 8, e a partir dela proceder como segue. Primeiro, pedindo que describan o máis detallada e rigorosamente posible cales son as transformacións que hai que aplicar ao cadrado para obter a tesela que se coñece coma o 'avión'. Por suposto, pretendendo que o alumnado sexa preciso nesa resposta, atendendo á construción do triángulo rectángulo e ao xiro necesario determinando tanto o seu centro coma o seu ángulo. Segundo, convidando a elaborar o modelo do avión con GeoGebra a partir do cadrado e segundo os pasos que eles mesmos pormenorizaron, e terceiro e último incitando a que estendan o mosaico decidindo os movementos que precisan realizar.

5. Conclusións

O uso das novas tecnoloxías é primordial na educación actual, pois dado o arraigamento que teñen na sociedade de hoxe en día, e a importancia capital posúen na vida diaria do noso alumando. É a nosa obriga integralas na aula dunha forma axeitada, sacando partido das súas vantaxes e ampliando as perspectivas dos estudantes respecto do seu uso, pero sempre entendéndoas coma un medio e nunca coma un fin en si mesmo.

É innegable a predisposición do alumnado perante o uso de ferramentas informáticas, e debe ser aproveitada polo profesorado para beneficiar a aprendizaxe. A súa motivación aumenta ao ver as producións que conseguen elaborando os seus propios mosaicos; o *software* empregado non supón unha traba no tocante ao seu manexo, xa que non é nada complicado de usar, e o que consegue é favorecer o aumento do interese dos estudantes por este tipo de actividades.

Ademais de incrementar a súa motivación, o uso destes programas colabora na asimilación dos contidos relacionados cos movementos, pois a facilidade coa que se manexan nestas aplicacións permite construír máis mosaicos e máis rápido do que se faría en papel. E permite tamén introducir pequenas variacións sobre o xa feito de forma case inmediata, algo impensable por escrito, o cal redunda nunha maior comprensión de certos conceptos porque é moi doado pensar como afectaría un cambio e executalo no momento.

Desa maneira a introdución de programas de xeometría dinámica coma GeoGebra ou o Polypad de Mathigon incide no aspecto cualitativo do traballo, ampliando a gama das actividades e tarefas posibles. Igualmente, esta proposta inclúe un espazo aberto para a imaxinación do alumnado e contextualiza coñecementos matemáticos abstractos, facilitando así a asimilación dos contidos e servindo como vehículo para o enriquecemento persoal e creativo.

6. Referencias

Carrillo de Albornoz Torres, A. (2012). El dinamismo de GeoGebra. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, nº. 29, páx. 10.

Critchlow, K. (1970). *Order in Space: A Design Source Book*. Viking Press, New York, 62-67.

Escher, M.C. (2016). *M. C. Escher: estampas y dibujos*. Taschen, Colonia.

Fernández Morales, F., Valderrama Ramos, J., Fernández Juárez, A. (2021). *La Alhambra matemática*. Los Cuadernos del Castor, Granada.

Hernández Rojo, F. (2010). Desde el estudio de los elementos de simetría de los mosaicos de la Alhambra hasta la creación de nuevos diseños. *Arte y geometría*. Universidad de Granada, 49-82.

Pérez Gómez, R. (2004). Un matemático pasea por la Alhambra. *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 81-94.

Schwarzenberger, R.L.E. (1974). The 17 Plane Symmetry Groups. *The Mathematical Gazette*, vol. 58, nº. 404, 123-131.