

## DOBRANDO PAPEL

**GREGORIO MONTES, ANTONIO**

*Catedrático de Física e Química xubilado  
do IES de Ribadeo Dionisio Gamallo*

*agremon2001@yahoo.es*

**RESUMO:** Simples curiosidades poden ser estudadas aproximándonos a elas dun xeito científico e servir como ilustración, complemento e/ou animación ó desenvolvemento, uso e desfrute da ciencia

**PALABRAS CLAVE:** Método científico, animación á investigación.

### 1. Introducción

O día que comezo a escribir isto pasei en Twitter por un vídeo de David Ballesteros<sup>[1]</sup> onde se propoñía algo que nos meus tempos de estudante xa chegara a min en xeito de desafío. A proposta actual era a mesma, tamén de desafío, e como a resposta práctica, realizada no vídeo, xa chegara hai moitas décadas, paso a explicar a solución en base matemática (que tamén esbozara daquela, despois de facelo na práctica).

Ata o de agora non dixen de xeito explícito o que. O tema é dar resposta a unha pregunta: cantas veces se pode dobrar unha folla de papel?

### 2. Fundamentación teórica e metodolóxica

No vídeo referido, dúas persoas dobran ata 6 veces a folla e aí paran, sen dicir porqué nin facer outro razoamento. Iso si, lanzan outra pregunta: que pasaría se se fai o mesmo a partir dun rolo de papel dunhas dúas cuartas de largo? (largo estimado a ollo por min a partir do vídeo).

Eu lembraba que, en circunstancias favorables, cunha folla fina e repasando varias veces cada dobrez, nalgún momento lograra adxudicar unha sétima dobrez. No vídeo propoñíase dobrar un folio, facíase e daba como resultado as 6 veces xa ditas.

Pero...

É un desafío que depende lixeiramente dalgunhas variables, aínda que relativamente tan pouco de calquera delas que se soe propoñer 'dobrar papel' sen facer máis especificacións.

### 3. Resultados e discusión

Así que, mirando un pouco, a primeira cousa, nestas terras tómase como 'folio' o que en realidade é A4, unha folla de 29,7 cm x 21,0 cm<sup>[2]</sup>. A diferenza é pequena, e case diríamos indeterminada: non hai historicamente unha única medida para 'folio' (aínda que a medida xeralmente usada en España para o folio é 31,5 cm x 21,5 cm<sup>[3]</sup>).

O tomar un formato A4 en vez do 'folio-folio' de 31,5 x 21,5 cm<sup>2</sup> facilita algo os cálculos: iso fai coincidir 'cuartilla' (medio folio) co formato A5 (21 x 14,8 cm<sup>2</sup>), ou 'octavilla' (media cuartilla) con A6 (14,8 x 10,5 cm<sup>2</sup>). Se dobramos o A4 pola metade das beiras máis longas, de 29,7 cm, resulta que agora as beiras máis longas pasan a ser as de 21 cm, e temos dous A5 de 21,0 cm x 14,85 cm cun grosor total (superposto) dobre, de 0,02 cm. Volvendo a dobrar por medio da beira máis longa, temos catro A6 superpostos de 14,85 cm x 10,5 cm cun grosor total de 0,04 cm, e así sucesivamente. Ou sexa, cada vez que temos unha superficie de papel metade (ó aumentar un número despois do 'A') os lados redúcense na raíz cadrada de 2, a máis de que en cada un dos tamaños, a beira longa é raíz cadrada de 2 veces a beira curta, o que conecta as beiras co tamaño superior (a beira longa) e inferior (a beira curta).

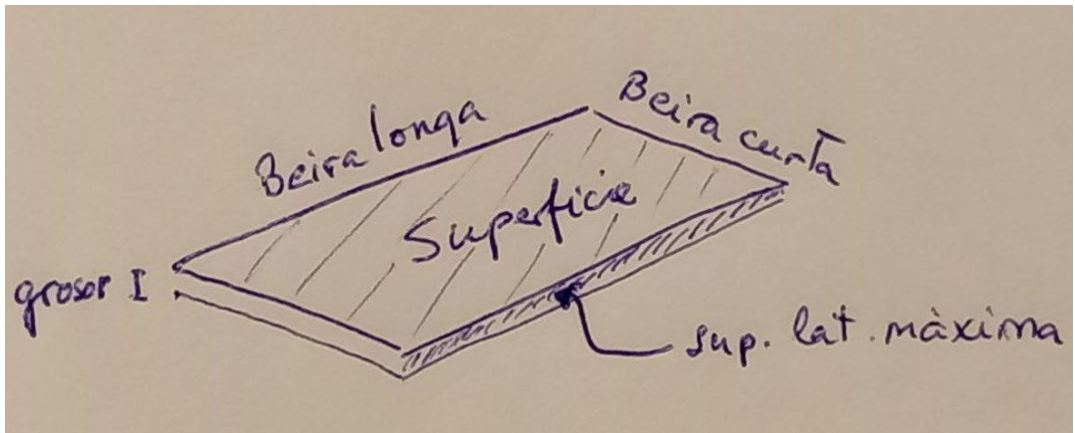
Antes de pasar a outra consideración, unha nota: no parágrafo anterior, parece haber unha pequena discrepancia de dimensións coas fraccións de milímetro, que desaparece en canto aplicamos a tolerancia da norma en canto ás lonxitudes, 1,5 mm ou 2 mm segundo os tamaños que tratemos<sup>[4]</sup>.

Do xeito dito, asumimos que dobramos cada vez a superficie de papel seguindo unha liña perpendicular á da vez anterior. É evidente que se sempre dobráramos por unha liña paralela á da vez anterior, o resultado podería ser ben diferente.

Hai un factor que podería quedar oculto nunha primeira aproximación, pero debemos analízalo pola súa variabilidade na práctica. Uso 'folios' de 80 g/m<sup>2</sup>, e medida a altura dun paquete de 500 obteño 5,2 cm, o que fai un grosor de 0,0104 cm por folla, que debo arredondar a 0,01 cm. Pero hai papel moito máis fino, por exemplo, o que se usaba nas biblias ('papel biblia'), e sen ir máis lonxe, mido nun vello Handbook of Chemistry and Physics o grosor correspondente a 2346 páxinas, ou sexa, 1173 follas, co resultado dun grosor de 7,0 cm. Isto é, 0,0060 cm (0,00597 cm) de grosor de papel, practicamente a metade que os folios que uso. Veremos o que inflúe ese 'factor 2'.

Volvendo ó tamaño de papel, podemos coller un A0 como folla de saída, vendo tamén o que inflúe o ter máis superficie para poder dobrar.

Fagamos unhas primeiras contas partindo do A4 de 80 g/m<sup>2</sup> con pregues sucesivos ideais (que representaría o facer cortes e amoreamentos sucesivos), dun A0 (máis de 1 m de lado longo!) e o mesmo grosor, e dun A0 con 'papel biblia' de 0,005 cm de grosor, arredondando cara a algo máis fino aínda que o que medín no Handbook. Obteríamos algo semellante ó seguinte, despois de cortar o número de cifras que se presentan:



**Figura 1**

**Definicións:**

- Beira Longa [BL]: beira da superficie plana de papel que é máis longa
- BL(N): BL despois de efectuar a dobrez N; os paréntese cun N no seu interior explicitan o valor da variable despois da dobrez N
- beira curta [bc]: beira da superficie plana de papel máis curta
- superficie [s]: área da superficie plana de papel
- grosor [g]: altura do lateral de papel
- Superficie Lateral Máxima [SLM]: área do lateral maior correspondente a unha superficie de papel
- relación BL/grosor [rBLg]: cociente entre a Beira Longa e o grosor
- relación s/SLM [rsSLM]: cociente entre a superficie e a Superficie lateral máxima

As medidas están dadas en micrómetros ( $\mu\text{m}$ ).

Táboa:

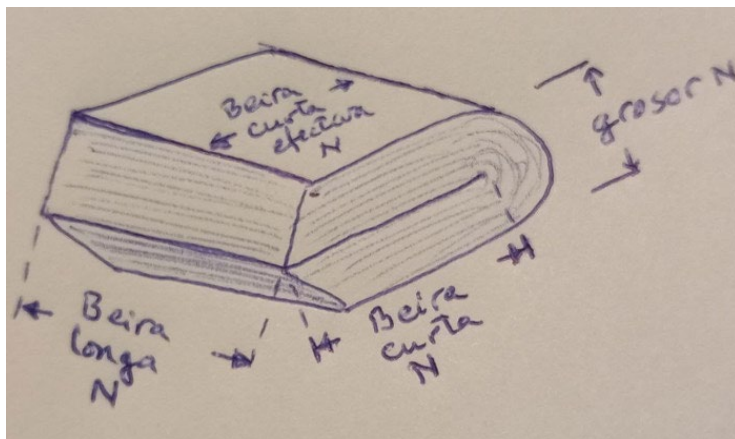
Caso ideal												
	Dobrez feita:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Beira longa (um)	297000	210011	148500	105005	74250	52503	37125	26251	18563		
	beira curta (um)	210000	148492	105000	74246	52500	37123	26250	18562	13125		
	superficie (um <sup>2</sup> )	6,24E+10	3,1E+10	1,6E+10	7,8E+09	3,9E+09	1,9E+09	9,7E+08	4,9E+08	2E+08		
A4	grosor (um)	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800	25600		
	Sup.Lat.Máx. (um <sup>2</sup> )	29700000	4,2E+07	5,9E+07	8,4E+07	1,2E+08	1,7E+08	2,4E+08	3,4E+08	5E+08		
	relación BL/grosor	2970	1050,05	371,25	131,26	46,41	16,41	5,80	<b>2,05</b>	0,73		
	relación sup/sup. Lat. máx.	2100	742,4621	262,5	92,80777	32,8125	11,601	4,10156	1,45012	0,5127		
	Beira longa (um)	1188000	840043	594000	420021	297000	210011	148500	105005	74250	52503	
	beira curta (um)	840000	593970	420000	296985	210000	148492	105000	74246	52500	37123	
	superficie (um <sup>2</sup> )	9,98E+11	5E+11	2,5E+11	1,2E+11	6,2E+10	3,1E+10	1,6E+10	7,8E+09	4E+09	2E+09	
A0	grosor (um)	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800	25600	51200	
	sup. lat. máx. (um <sup>2</sup> )	1,19E+08	1,7E+08	2,4E+08	3,4E+08	4,8E+08	6,7E+08	9,5E+08	1,3E+09	2E+09	3E+09	
	relación BL/grosor	11880	4200,21	1485,00	525,03	185,63	65,63	23,20	8,20	<b>2,90</b>	1,03	
	relación sup/sup. Lat. máx.	8400	2969,848	1050	371,2311	131,25	46,4039	16,4063	5,80049	2,0508	0,7251	
	Beira longa (um)	1188000	840043	594000	420021	297000	210011	148500	105005	74250	52503	37125
	beira curta (um)	840000	593970	420000	296985	210000	148492	105000	74246	52500	37123	26250
	superficie (um <sup>2</sup> )	9,98E+11	5E+11	2,5E+11	1,2E+11	6,2E+10	3,1E+10	1,6E+10	7,8E+09	4E+09	2E+09	1E+09
A0 biblia	grosor (um)	50	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800	25600	51200
	sup. lat. máx. (um <sup>2</sup> )	59400000	8,4E+07	1,2E+08	1,7E+08	2,4E+08	3,4E+08	4,8E+08	6,7E+08	1E+09	1E+09	2E+09
	relación BL/grosor	23760	8400,43	2970,00	1050,05	371,25	131,26	46,41	16,41	5,80	<b>2,05</b>	0,73
	relación sup/sup. Lat. máx.	16800	5939,697	2100	742,4621	262,5	92,8078	32,8125	11,601	4,1016	1,4501	0,5127

Observamos que nas condicións ideais expostas:

1. A lonxitude da BL, polas características do formato A, vai diminuindo en cada dobrez nun factor raíz de 2, correspondendo coa da bc do tamaño anterior.
2. O grosor vai duplicándose en cada dobrez, ó amorear cada vez un número dobre de follas.
3. A relación entre a lonxitude máxima de calquera das beiras e o grosor, en consonancia, vai aumentando nun factor dúas veces raíz de dous, o mesmo que a relación entre a superficie do papel (BL x bc) e a superficie dunha das beiras (sexa unha das grandes, BL x g, ou unha das pequenas, bc x g).

Dese xeito, para o A4, a superficie dun lateral do montón sobrepasaría á superficie da n-illa<sup>[5]</sup> na oitava vez de dobrado, para o A0 igualaríase na novena, e para o A0 con papel biblia quedaría claramente sobrepasado tras a décima dobrez.

Cal é a diferenza básica entre o corte entendido como xeito ideal de dobrez e unha dobrez real dunha folla ou apilamento de follas? Vexamos o seguinte esquema:



**Figura 2**

Representa a situación tras unha dobrez enésima (N) real, tentando partir en dúas a beira longa despois dunha dobrez ideal (corte) ata N-1. É dicir, simplificando os pasos anteriores a N ó obviar as dobreces correspondentes, pero non a dobrez N. No esquema fanse patentes varias cousas:

- A beira curta 'efectiva' N resulta de restar á beira longa N-1 o recorrido do xiro do papel,  $\pi$  pola metade do grosor (radio), e logo, dividir entre dous:

$$bc_e(N) = [BL(N-1) - \frac{1}{2}[\pi g(N)]]/2$$

- A máis da dificultade de dobrar o papel para vencer a resistencia do mesmo debido ó grosor, as superficies laterais chegan a ser dun tamaño que na seguinte dobrez a beira do papel non podería nin dar a volta a toda a circunferencia. É dicir, quedámonos sen superficie 'plana' (é dicir, superficie da 'páxina') de papel, perdendo o sentido falar de tal superficie, e polo tanto, do cómputo desa nova dobrez.

O anterior nos leva a considerar, mesmo en condicións ideais, cando é o momento de parar: quedámonos sen beira curta efectiva cando a Beira Longa N-1 menos a lonxitude da circunferencia de dobrez é, como moito, cero:

$$bc_e(N) = [BL(N-1) - \frac{1}{2}[\pi g(N)]]/2 \leq 0$$

$$\text{como } g(N) = BL(N)/rBLg(N) = 2 \cdot g(N-1) = 2[BL(N-1)/rBLg(N-1)]$$

entón a condición queda como

$$BL(N-1) - \pi BL(N-1)/rBLg(N-1) \leq 0$$

Ou

$$1 \leq \pi/rBLg(N-1)$$

co que temos que a condición  $rBLg(N-1) \leq \pi$  implica a imposibilidade dunha nova dobrez.

Volvendo ó conxunto de táboas presentado antes, no caso A4, a dobrez 8 non tería sentido aínda supoñendo que as 'dobreces anteriores' fosen cortes ideais. O mesmo sucedería co A0 e a dobrez 9 e con A0 biblia e a dobrez 10.

De xeito máis xeral, a relación  $bc_c(N) = [BL(N-1) - \frac{1}{2}[\pi g(N)]]/2$  debera aplicarse dende o comezo, obtendo unha táboa tal como:

Aproximación 1												
Dobrez feita:		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A4	Beira longa (um)	297000	210000	148421	104843	73897	51793	35692	23383	12819		
	beira curta (um)	210000	148421	104843	73897	51793	35692	23383	12819	1639		
	superficie (um2)	6,24E+10	3,1E+10	1,6E+10	7,7E+09	3,8E+09	1,8E+09	8,3E+08	3E+08	2E+07		
	grosor (um)	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800	25600		
	Sup.Lat.Máx. (um2)	29700000	4,2E+07	5,9E+07	8,4E+07	1,2E+08	1,7E+08	2,3E+08	3E+08	3E+08		
	relación BL/grosor	2970	1050,00	371,05	131,05	46,19	16,19	5,58	<b>1,83</b>	0,50		
	relación sup/sup. Lat. máx.	2100	742,1073	262,1073	92,37071	32,3707	11,1536	3,65364	1,00151	0,064		
A0	Beira longa (um)	1188000	840000	593921	419843	296647	209293	147067	102133	68507	41014	
	beira curta (um)	840000	593921	419843	296647	209293	147067	102133	68507	41014	14147	
	superficie (um2)	9,98E+11	5E+11	2,5E+11	1,2E+11	6,2E+10	3,1E+10	1,5E+10	7E+09	3E+09	6E+08	
	grosor (um)	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800	25600	51200	
	sup. lat. máx. (um2)	1,19E+08	1,7E+08	2,4E+08	3,4E+08	4,7E+08	6,7E+08	9,4E+08	1,3E+09	2E+09	2E+09	
	relación BL/grosor	11880	4200,00	1484,80	524,80	185,40	65,40	22,98	7,98	<b>2,68</b>	0,80	
	relación sup/sup. Lat. máx.	8400	2969,607	1049,607	370,8082	130,808	45,9583	15,9583	5,35209	1,6021	0,2763	
A0 biblia	Beira longa (um)	1188000	840000	593961	419921	296823	209647	147783	103567	71378	46757	25636
	beira curta (um)	840000	593961	419921	296823	209647	147783	103567	71378	46757	25636	3272
	superficie (um2)	9,98E+11	5E+11	2,5E+11	1,2E+11	6,2E+10	3,1E+10	1,5E+10	7,4E+09	3E+09	1E+09	8E+07
	grosor (um)	50	100	200	400	800	1600	3200	6400	12800	25600	51200
	sup. lat. máx. (um2)	59400000	8,4E+07	1,2E+08	1,7E+08	2,4E+08	3,4E+08	4,7E+08	6,6E+08	9E+08	1E+09	1E+09
	relación BL/grosor	23760	8400,00	2969,80	1049,80	371,03	131,03	46,18	16,18	5,58	<b>1,83</b>	0,50
	relación sup/sup. Lat. máx.	16800	5939,607	2099,607	742,0582	262,058	92,3646	32,3646	11,1529	3,6529	1,0014	0,0639

Nesta nova táboa, que representa só unha primeira aproximación, seguimos a contabilizar a SLM como BL x g, e vemos que a relación rBLg non varía moito en relación ó caso ideal. Sen facer aproximacións máis finas (difíciles de manexar, como o efecto resultante de dobrar tendo nun extremo da liña de dobrez outra dobrez perpendicular), chegados a este punto temos que volver sobre o que significan os números que imos obtendo.

Collamos datos tras a dobrez N=6 para un A4, remedando o caso presentado no vídeo. Con eles podemos obter superficies e lonxitudes diversas:

		N=6	N=7
A4	Beira longa (um)	35691,6	23383,3
	beira curta (um)	23383,3	12819,3
	grosor (um)	6400,0	12800,0
	lonxitude semicir. Beira	10053,1	20106,2
	superficie (um2)	834588403,3	299756932,6
	Sup.Lat.Máx. (um2)	228426549,5	299306197,8
	relación BL/grosor	5,6	1,8
	relación sup/sup. Lat. máx.	3,7	1,0
	pico saínte de pregado	5026,5	10053,1
	SLM ampliada (um2)	290456755,6	380584075,4
	Slm (um2)	149663152,0	164106838,1
	sup. Dobrez (um2)	358811584,8	470149076,1

Lembrando que no vídeo citado ó comezo daba N=6 como límite, mentres que eu coído lembrar algunha vez, repasando e repasando as dobreces, chegar a N=7, e collendo os números anteriores, temos que nunha primeira aproximación teórica, sería posible obter ese N=7, pero máis dunha persoa consideraría que 'iso xa non debe ser considerado como dobrez'. E logo?

O primeiro, seguindo a orde da táboa, é que para N=7 o grosor (teórico e só en aproximación primeira, que tendo máis cousas en conta aumentaría) é practicamente idéntico á beira curta, algo que xa fai pensar sobre o que debemos considerar como superficie para o dobrado.

Se seguimos a baixar, a lonxitude que representa a última beira dobrada é pouco menor que a BL, superando de lonxe á bc, incidindo no dito no parágrafo anterior.

En canto ás superficies horizontal do papel e a das beiras, ó depender da relación bc e g, volvemos estar nunha situación idéntica á da primeira destas consideracións.

En canto ás dúas relacións, que nos daría a validez da dobrez, vemos que se manteñen abondo por riba de 1 con  $N=6$ , pero no entorno de 1 con  $N=7$ , incidindo nos mesmos termos que as consideracións anteriores. Igual se pode dicir das dimensións do pico saínte de pregado, que con  $N=7$  é de tamaño semellante á beira curta ou ó mesmo grosor do conxunto de pregos de papel. Ou das superficies lateral máxima ampliada, mínima e superficie da dobrez (do semicilindro que se forma ó dobrar o papel), onde se ve claramente que a primeira destas, para  $N=7$  supera en case un 30 % a superficie da 'páxina'.

#### 4. Conclusión

O tema non ven en ningún programa ou deseño curricular, nin do país nin doutros lugares, que eu saiba, pero serve para animar ó alumnado na experimentación e na ciencia, entre outras cousas. E, como moitas outras situacións, o profesorado é quen de usalo ou non, de aproveitalo ou non cando se usa, ou de aproveitar unhas cousas ou outras... ti mesma.

Para o seu posible aproveitamento, cabe lembrar aquí que este traballo xurde dun xogo / adiviña que se presenta como unha competición, non como algo que se pode analizar e chegar a un resultado. Por iso pode ser usado para introducir e facerlle un repaso ó método científico, ás aproximacións sucesivas, á creatividade individual e grupal, ou á importancia da matemática básica, entre outras posibilidades.

No referente en exclusiva ó tema tratado, se ben constitúe unha inexactitude o dicir que o número de veces que se pode dobrar unha folla de papel é 6, serve como referencia e aproximación abonda, sendo o resultado práctico de case a totalidade de veces que se pretenda desenvolver o desafío.

#### 5. Referencias

[1] Accesible en <https://www.instagram.com/p/Co5XVjDvQ5C/>

[2] Ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Paper\\_size](https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_size)

[3] Ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Paper\\_size](https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_size) , [https://es.wikipedia.org/wiki/Tama%C3%B1o\\_folio](https://es.wikipedia.org/wiki/Tama%C3%B1o_folio) e ligazóns dos artigos, ou <https://graficascampoamor.com/cuanto-mide-un-folio-tamano-folio/> entre outras moitas posibilidades.

[4] [https://en.wikipedia.org/wiki/Paper\\_size](https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_size)

[5] Cuartilla, octavilla, ... n-illa