QUE CAE MÁIS RÁPIDO, UN ELEFANTE REAL OU UN DE POLIESTIRENO? CAIDA REAL *VERSUS* CAÍDA LIBRE

GARCÍA-VERDUGO DELMAS, ANDRÉS M.
IES Tomás Mingot (Logroño)
agarciaverdugo@gmail.com

RESUMO: A explicación da caída dun corpo segundo o modelo da caída libre no baleiro está ás veces moi lonxe do que se pode observar na realidade, e con frecuencia preséntase aos estudantes como a única e verdadeira lei física que describe a caída de calquera obxecto, asumindo un rango de aplicación moito maior que o que lle corresponde.

É preciso ter un modelo axeitado para describir a caída dos corpos no aire, e por que non? aplicalo directamente na aula, xunto coa aproximación da caída libre, cando queremos describir casos de caídas reais.

Neste traballo desenvólvese un modelo para a caída considerando o movemento nun fluído. Para facilitar o seu uso na práctica, elaborouse unha folla de cálculo que permite obter todos os parámetros cinemáticos da caída real, incluíndo gráficos, a partir dos datos iniciais do corpo que vai caer, así como comparalos coa súa hipotética caída no baleiro.

PALABRAS CLAVE: Cinemática, caída libre, aceleración da gravidade, velocidade, movemento nun fluído.

1. Introdución

Se se deixasen caer desde a mesma altura, cal chegaría primeiro ao chan?, un bloque de cemento grande e compacto de 5 toneladas ou outro da mesma forma e volume pero feito de poliestireno expandido?... Efectivamente. A resposta intuitiva[1] é a correcta. O de cemento cae máis rápido. Non obstante, a diferenza non é tan grande como pode parecer nun principio. O certo é que se os

[1] Pódese atopar información adicional sobre aspectos epistemolóxicos en relación coa caída libre e maila súa percepción e interpretación polo alumnado nos artigos citados nas referencias ao final [Blown 2013], [Gluck 2003], [Kavanagh 2006], [Sánchez 2011]

dous caesen dende unha altura de 20 m, cando o bloque pesado tocase o chan, o de cortiza branca, moito máis lixeiro, aínda estaría a un metro e medio de chegar. Porén, se caesen nas mesmas condicións no baleiro, ambos chegarían exactamente ao mesmo tempo, só dúas milésimas de segundo antes do bloque de cemento no primeiro caso.

Debíalle esta resposta a un alumno de Física e Química de 4º ESO que non hai moito tempo fixo esa pregunta na clase na versión literal do título, imaxinando a caída dun elefante real e outro de cortiza branca. A miña resposta: "caerían igual", asegureille, respondeu máis a un modelo simplificado do movemento de caída no aire que a unha descrición realista de como caen as cousas. Os profesores pecamos en ocasións cando explicamos fenómenos físicos reais, como a caída dun corpo no aire, aplicando modelos ou simplificacións que ás veces son excesivas ou inxustificables.

Ao longo de este traballo describirase con rigor un modelo realista do fenómeno físico da caída dos graves en condicións reais en contraposición a simplificación do modelo de caída libre, facendo as aproximacións iniciais necesarias (forma dos obxectos, gravidade constante, homoxeneidade do aire, ausencia de turbulencias, etc.) e tratando de acoutar os límites de aplicación que delas derivan. Rematarase finalmente coa elaboración dunha folla de cálculo que nos permitirá simular automaticamente todo tipo de caídas reais en comparación coa caída libre ideal que aprenden os nosos alumnos de secundaria, e algúns exemplos dos resultados obtidos que nos levarán finalmente a unhas conclusións sobre como caen os corpos realmente.

Este traballo vai dirixido ao profesorado de Física de secundaria, e ten como obxectivo que sirva de base conceptual así como de ferramenta para describir e comparar a caída dos corpos en condicións axeitadas á realidade, e de paso que sirva para reflexionar sobre algunhas implicacións didácticas á hora de explicar a caída libre na aula.

Caída real, caída libre? Por unha descrición realista da caída dos corpos

O modelo de caída libre debida á gravidade na superficie terrestre garante que a aceleración constante da caída (g = 9,8 m/s^2) sexa a mesma para todos independentemente da súa masa, forma ou tamaño. Isto é perfectamente válido para calquera corpo que caia ao baleiro, pero no caso da caída real polo aire da atmosfera, que todos podemos observar decotío, este modelo só é aceptable cando se trata de corpos aerodinámicos de masa e densidade notables e durante os primeiros momentos da súa caída.

Por outra banda a aproximación á caída real, que os profesores utilizamos cando queremos dar máis explicacións ao alumnado, garante que a fricción contra o aire, que aumenta coa velocidade, diminúa a súa aceleración ata que esta desapareza e colla unha velocidade límite coa que o corpo segue a caer con movemento uniforme. Esta forza, ademais da velocidade, dependería principalmente da forma e do volume do obxecto pero non da súa masa[2], como adoitamos explicar. Pero ¿realmente temos que crer que un gran globo inflado de aire vai caer igual que outro do mesmo tamaño cheo de auga? Ou, como dicía o alumno, que un elefante e outro de cortiza van caer igual de rápido? Non podemos extrapolar modelos sinxelos a situacións que quedan fóra do seu marco de aplicación. E o certo é que si, a aceleración da caída no aire si que depende da masa. Outra cousa é que, dependendo de que condicións, este efecto sexa máis ou menos apreciábel.

[2] Por iso unha pelota de tenis cae tan rápido coma outra igual pero chea de auga, catro veces máis pesada, tal e como se fai algunha vez na aula para probar experimentalmente que a masa non afecta á velocidade de caída.

Entón, existe un xeito máis realista e exacto de describir a caída de corpos na nosa contorna?, que variables inflúen nela e ata que punto?, cando podemos asimilala a unha caída libre? E cales son as ecuacións que nos permiten atopar aceleración, velocidade, altura e tempos reais de caída segundo este modelo? A continuación tentaremos responder a estas preguntas.

2. Cinemática da caída vertical dun corpo no aire

Unha boa aproximación moito máis realista que o modelo de caída libre para describir a caída vertical real de corpos consiste en considerar o movemento dun corpo de masa m, densidade d e sección transversal A que cae con velocidade crecente v nun fluído gasoso (aire) de densidade d_f . Para evitar un modelo demasiado complicado, asumiremos algunhas aproximacións razoables para as condicións de caída da maioría dos corpos que queremos estudar na nosa contorna, que son as seguintes:

- Aire homoxéneo que opón un rozamento (forza de arrastre) proporcional ao cadrado da velocidade[3], desprezando turbulencias e outros efectos aerodinámicos secundarios.
- Corpo ríxido de xeometría esférica e sección circular sen movemento de rotación.

Aceleración de caída

Un corpo que cae polo aire está sometido á acción conxunta de tres forzas verticais:

- Forza da gravidade da Terra (ou peso do corpo, cara abaixo e constante): $P = m.g$
- Forza de empuxe hidrostático do aire (cara arriba e constante): $E = d_f.g.V$
- Forza de rozamento[4] que opon o aire (cara arriba e crecente): $F_r = 0,2.d_f.A.v^2$

A forza resultante F destas tres fará que o corpo caia cunha aceleración a que vai ser a ser resultante de tres compoñentes: A aceleración da gravidade g, a desaceleración do empuxe a_e e maila desaceleración do rozamento a_r .

$$F = P - E - Fr = m.a$$

$$a = F/m = mg/m - E/m - Fr/m$$

$$a = g - a_e - a_r$$

Como g e a_e son constantes, e como a_r aumenta a partir de cero a medida que o corpo gaña velocidade, o corpo comeza a caer desde o repouso cunha *aceleración inicial* a_0 :

$$a_0 = g - a_e$$

---

[3] $F_r = k.v^2$, donde a constante de proporcionalidade k depende das dimensións e forma do corpo que cae e das condicións do aire. A bibliografía consultada (ver referencias) xustifica a aplicación xeral de esta dependencia coa velocidade para o arrastre no aire polos resultados experimentais obtidos no maior número das caídas reais.

[4] $F_r = 0,2.d_f.A.v^2$ é a *forza de arrastre* proporcional ao cadrado da velocidade, que ven da ecuación:

$$Fr = ½ .C.d_f.A.v^2$$

que é a expresión xeral do rozamento sobre un corpo esférico de sección transversal $A=\pi R^2$ que se move con velocidade v nun fluído de densidade d_f, tomando para o coeficiente de arrastre C o valor de 0,4 , valor aproximadamente constante que se xustifica experimentalmente para unha ampla gama de tamaños e formas de corpos caendo no aire. [Franco 2009], [Open Stax 2022], [Young 2009]

A súa aceleración instantánea $a = a_0 - a_r$ vai diminuíndo, de non chegar antes ao chan, ata que $a_r = a_0$. A velocidade acadada nese intre xa non aumenta máis, dise entón que acadou a súa *velocidade límite* v_L, e continúa o seu descenso con movemento uniforme.

A continuación imos analizar unha a unha as tres compoñentes da aceleración que van determinar as velocidades e os tempos de caída, aplicadas a un corpo esférico de masa m, radio R e densidade d que se deixa caer na superficie da Terra no aire de densidade d_f [5]

- Aceleración por efecto da gravidade (g)

A forza da gravidade (o peso) $P = m.g$ acelera a calquera corpo por igual, independentemente da súa masa ou tamaño:

$$a = P / m = m.g / m = g$$

No caso de suprimir o fluído (aire) ao través do cal cae o corpo, facendo o baleiro, quitaríanse os efectos da freada debidos ao rozamento e mailo empuxe e tan só actuaría a aceleración da gravidade, e nun mesmo lugar da superficie terrestre tódolos corpos, independentemente das súas características, caerían ao mesmo tempo con aceleración constante $a = g = 9{,}8$ m/s^2, aumentado a súa velocidade proporcionalmente co tempo. Isto é o que se denomina *caída libre*[6].

- Desaceleración debida ao empuxe do fluído (aire) (a_e)

$$a_e = E / m = d_f.g.V / d.V$$

$$a_e = g.d_f / d$$

A freada polo empuxe hidrostático do aire sobre o corpo mentres cae é constante e inversamente proporcional á súa densidade. Xeralmente non chega afectar máis aló do segundo decimal de g[7], pero para corpos grandes e ocos, con densidades moi baixas, pode chegar a ser a causa principal de que baixen lentamente sen aceleración (un globo inflado), ou mesmo que suban (un globo de helio).

- Desaceleración debida ao rozamento do aire (a_r)

$$a_r = Fr / m = 0{,}2.d_f.A.v^2 / m = 0{,}2.d_f.\pi R^2.v^2 / (d \,.\, 4/3.\pi R^3) = 0{,}15.v^2.d_f / d.R$$

[5] En xeral podemos tomar como densidade do aire a temperatura ambiente e presión normal, $d_f = 1{,}2$ kg/m^3 e como gravidade na superficie terrestre $g = 9{,}8$ m/s^2

[6] Pódese comprobar este feito no experimento de Galileo onde unha pluma e un peso caen simultaneamente nun tubo de baleiro, e a coñecida recreación do mesmo feito na Lúa na misión do Apolo XV, dispoñibles en https://www.youtube.com; ou na aula, deixando caer un libro pesado e unha pluma lixeira detrás del para eliminar o aire que ten diante, privándoa así da fricción que frearía a súa caída.

[7] O efecto do empuxe, que é constante na caída, pódese considerar como unha diminución da aceleración da gravidade que resulta nunha gravidade efectiva:

$$g_{\text{efectiva}} = g - a_e = g - g.d_f/d = g(1 - d_f/d)$$

A bibliografía xeralmente non ten isto en conta ao desenvolver expresións para a aceleración da caída ou a velocidade límite. Esta omisión só é aceptábel en caídas de obxectos cunha densidade moito maior que a do aire ($d_f/d \ll 1$), pero non en corpos grandes e ocos ou de materiais moi lixeiros.

$$a_r = 0{,}2.d_f.A.v^2/m = 0{,}15.v^2.d_f/d.R$$

a_r aumenta cuadraticamente coa velocidade de caída desde cero ata facerse máxima e igual a $/g - a_e/$ cando acada a velocidade límite. Para unha determinada velocidade de caída, o efecto da freada polo rozamento é máis acusado canto maior sexa a sección frontal que presente e menor masa teña o obxecto que cae ou, o que é o mesmo, canto menos denso e máis pequeno (menor d e menor R no denominador da ecuación anterior).

Por exemplo, por ser o rozamento do aire máis importante en comparación co peso, ralentizará máis ao caer unha pelota de praia inflada con aire que a mesma chea de auga (maior d), e esta moito menos que unha pinga de auga (menor R). Por este motivo xustifícase o feito observado por todos de que unha formiga (lixeira e pequena) cae máis lentamente que un croio (denso e máis grande). A formiga acelera menos e uniformiza antes a súa caída cunha velocidade límite máis pequena. Por isto mesmo un paracaidista (gran masa m) en caída libre provoca unha gran aceleración de freada cando abre o paracaídas aumentando drasticamente a súa sección frontal (A).

Obtención da velocidade e a altura recorrida na caída

Acabamos de obter a aceleración de caída $a(v)$ en función da velocidade, sendo $(g - a_e)$ a *aceleración inicial* a_0 para $v = 0$ (*gravidade efectiva*).

$$a(v) = g - a_e - a_r(v) = a_0 - a_r(v)$$

$$a(v) = a_0 - 0{,}2.d_f.A.v^2/m$$

- <u>Velocidade límite</u> (v_L)

Imola obter facendo $a(v) = 0$ na ecuación anterior e despexando a velocidade v, resultando:

$$v_L = \sqrt{m.a_0/0{,}2 \cdot d_f \cdot A}$$

- <u>Velocidade en función do tempo</u> $v(t)$

Obtense facendo $a(v) = dv/dt$, e integrando a ecuación diferencial que queda:

$$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t + a_r(v) - a_0 = 0$$

$$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t - a_0 + 0{,}2.d_f.A.v^2/m = 0 \quad ; \quad v_L^2 = m.a_0 / 0{,}2.d_f.A$$

$$\mathrm{d}v/\mathrm{d}t + a_0.v^2/v_L^2 - a_0 = 0$$

e cuxa solución é: $v(t) = v_L \cdot \frac{e^{b\cdot t}-1}{e^{b\cdot t}+1}$, donde $b = 2a_0/v_L$

- <u>Altura percorrida en caída vertical en función do tempo</u> $h(t)$

Obtense a partir de $v(t) = \mathrm{d}h/\mathrm{d}t$, integrando a ecuación diferencial que resulta:

$$\mathrm{d}h/\mathrm{d}t - v(t) = 0$$

$$\mathrm{d}h/\mathrm{d}t - v_L \cdot \frac{e^{b\cdot t}-1}{e^{b\cdot t}+1} = 0$$

e cuxa solución é: $h(t) = \frac{v_L{}^2}{a_0} \cdot ln\frac{e^{b\cdot t}+1}{2} - v_L \cdot t$

Partindo das ecuacións obtidas para a aceleración en función da velocidade *a(v)*, e para a velocidade e altura caída en función do tempo *v(t)* y *h(t)* , despexando e recompoñéndoas axeitadamente, seremos quen de obter as funcións *t(v)*, *t(h)*, *v(h)* y *h(v)*, e así relacionar as variables cinemáticas *t, v, h* de dúas en dúas. Isto permítenos facer calquera tipo de cálculo para unha determinada caída real, como por exemplo o tempo e velocidade ao caer dende unha altura, o tempo e altura na que se acada a velocidade límite, ou a altura na que se atopa e a velocidade que leva o corpo nun intre dado.

A tarefa de resolver as ecuacións diferenciais[8], e mesmo a de despexar cada unha das variables a partir das súas solucións, é longa e un pouco dificultosa como para poñer aquí[9] . Así a todo, pode resultar de interese como reto para o alumnado de Matemáticas de segundo de bacharelato en adiante. Os resultados que se obteñen finalmente móstranse no seguinte epígrafe.

Ecuacións do movemento: Funcións das variables cinemáticas *a, v, h, t*

Na columna da esquerda da **táboa 1** aparecen as ecuacións obtidas para todas as variables cinemáticas, expresadas da forma máis simplificada posíbel en función dos parámetros físicos, e outros definidos *ad hoc*, que aparecen na columna da dereita, de tal forma que os cálculos poidan realizarse dun xeito máis doado na práctica.

Táboa 1. *Ecuacións obtidas para o movemento de caída de corpos no aire.*

Ecuacións do movemento	**Parámetros e funcións relacionadas**
Aceleración, velocidade, altura descendida e tempo (a, v, h, t)	$A=\pi R^2$, m, d, d_f Sección trans., masa, densidades do corpo e o aire
$a(v) = g - a_e - a_r$	g Aceleración da gravidade
$v(t) = v_L \cdot \frac{e^{b\cdot t}-1}{e^{b\cdot t}+1}$	$a_0 = g - a_e$ Aceleración inicial (v = 0)
$t(v) = \frac{v_L}{2\cdot a_0} \cdot ln\frac{v_L+v}{v_L-v}$	$a_e = g \cdot d_f / d$ Desaceleración do empuxe
$h(t) = \frac{{v_L}^2}{a_0} \cdot ln\frac{e^{b\cdot t}+1}{2} - v_L \cdot t$	$a_r = 0{,}2 \cdot d_f \cdot A \cdot v^2/m$ Desaceleración do rozamento $a_r(v)$
$t(h) = \frac{v_L}{2\cdot a_0} \cdot ln\left(2z-1+2\sqrt{z(z-1)}\right)$	$v_L = \sqrt{m.a_0/0{,}2 \cdot d_f \cdot A}$ Velocidade límite
$v(h) = v_L \cdot \sqrt{1-1/z}$	$b = 2 \cdot a_0/v_L = \sqrt{0{,}8 \cdot d_f \cdot g \cdot A/m}$ Parámetro auxiliar b
$h(v) = -\frac{{v_L}^2}{2\cdot a_0} \cdot ln[1-(v/v_L)^2]$	$z = e^{h \cdot b/v_L}$ Función auxiliar *z(h)*

[8] Para resolver as ecuacións serve de axuda unha calculadora de ecuacións en líña, aínda que convén resolvelas despois a man, redefinindo algúns parámetros, para presentar unhas solucións máis simplificadas e operativas.

[9] Pódese consultar o desenrolo alxebraico completo, tanto da resolución das ecuacións como do cambio de variables nas funcións obtidas ata obter as 6 ecuacións cinemáticas finais, no blog *Con F de física y con Q de Química* (pestana: *Mis trabajos*, epígrafe: *Caída libre*) [García-Verdugo, 2021]

3. Aplicación das ecuacións cinemáticas da caída real

Cálculos para obter aceleración, velocidade, altura e tempo dunha caída real.

As ecuacións anteriores permiten obter para calquera tempo a aceleración, velocidade e altura recorrida dun corpo que cae polo aire, amais da velocidade e aceleración que leva a unha altura determinada, ou o tempo en acadar esa velocidade ou altura.

Estas ecuacións non son sinxelas e poden facerse pesadas de manexar. Para facer estes cálculos rapidamente e podelos comparar entre si, é moi oportuno contar coa axuda dunha folla de cálculo. Para este estudo elaborouse unha folla de cálculo Excel [10]. A calculadora opera do seguinte xeito: En primeiro lugar selecciónanse a masa e tamaño (m, R) do corpo e as condicións nas que cae, gravidade e temperatura do aire (g, T). Con estes datos de entrada calcula e presenta os parámetros fixos (d, d_f, A, V, g, a_e, a_0, b, v_L) necesarios para utilizar as ecuacións. Dándolle agora un valor determinado á velocidade, o tempo ou a altura caída, calcula e mostra inmediatamente tódalas outras variables cinemáticas (a, h, v, t), usando as ecuacións $h(t)$, $t(v)$, $v(h)$ y $a(v)$.

En resumo, coa calculadora pódese saber ao instante, para calquera corpo real que caia en vertical polo aire, cal vai ser a súa velocidade límite e cando a vai alcanzar, obter as gráficas de a, v, h vs. t do seu movemento, e para unha variable cinemática nun punto dado da caída (a, v, h ó t), o valor das outras tres. A folla tamén compara os resultados da caída real cos da caída libre no baleiro.

Exemplos de caídas reais calculadas para algúns obxectos[11]

Na **táboa 2** móstranse os resultados obtidos coa axuda da folla de cálculo para diferentes obxectos que caen verticalmente no aire dende unha altura de 20 m. Resulta interesante comparar as caídas de obxectos pequenos cos grandes, dos densos cos lixeiros, canto valen e cando alcanzan as súas velocidades límite, e mesmo comparar eses resultados coa caída libre no baleiro.

Se observamos con atención os exemplos calculados que aparecen na táboa, podemos decatarnos de que en condicións reais e alturas de caída apreciables, se deixamos caer dous corpos ao mesmo tempo dende a mesma altura, sucede que:

- Se teñen a mesma forma e volume, o máis lixeiro (menos masa) acelera menos e chega máis tarde ao chan.
- Se teñen a mesma forma e masa pero densidade diferente, é dicir, un é máis voluminoso que o outro, entón o máis grande (maior área ou sección) acelera menos e tarda máis en caer.
- Se só se diferencian na forma, ou aínda que sexan idénticos, caen con orientacións diferentes, é evidente que tardará máis en caer o que opoña ao aire unha maior sección frontal A durante a súa caída.

[10] Esta folla de cálculo pódese usar en liña ou descargala accedendo á ligazón: *Calculador de caídas reales,* no blog *Con F de física y con Q de Química* (pestana: *Mis trabajos*, epígrafe: *Caída libre*) [García-Verdugo 2021]

[11] As formas dos obxectos e mailas alturas de caída destes exemplos (20 m) xustifican as aproximacións de sección circular e gravidade e densidade do aire constante, nas que se basea o modelo, tal como se comentou ao principio.

Táboa 2. *Comparación de caídas reais (en aire) de varios corpos e a caída libre no baleiro.*

Dato, magni-tude *	Corpos en caída real polo ar								Caída libre no baleiro
	Boliña de porexpán	Gota de auga	Perdigón de ferro	Pelota oca de tenis	Pelota chea de auga	Pelota maciza de ferro	Elefante real	Elefante porexpán	
m (kg)	$0{,}3.10^{-6}$	14.10^{-6}	110.10^{-6}	0,060	0,15	1,2	5400	86	Calquera valor
R (m)	$1{,}5.10^{-3}$	$1{,}5.10^{-3}$	$1{,}5.10^{-3}$	33.10^{-3}	33.10^{-3}	33.10^{-3}	1	1	
A (m^2)	$7{,}1.10^{-6}$	$7{,}1.10^{-6}$	$7{,}1.10^{-6}$	$3{,}4.10^{-3}$	$3{,}4.10^{-3}$	$3{,}4.10^{-3}$	3,14	3,14	
V (m^3)	14.10^{-9}	14.10^{-9}	14.10^{-9}	150.10^{-6}	150.10^{-6}	150.10^{-6}	4,19	4,19	
d (kg/m^3)	21	1000	7900	400	1000	7900	1290	21	
$\mathbf{v_L}$ (m/s)	1,25	9,0	25,3	26,6	42,3	119	264	32,3	-
$\mathbf{t_L}$ (s)	0,36	2,43	6,82	7,22	11,4	32,1	71,4	9,3	-
$\mathbf{a_0}$ (m/s^2)	9,22	9,79	9,80	9,77	9,79	9,80	9,79	9,21	9,80
$\mathbf{a_e}$ (m/s^2)	0,58	0,012	0,0015	0,030	0,012	0,001	0,009	0,58	0
$\mathbf{a_{r20}}$(m/s^2)	8,64	9,71	4,50	4,14	1,92	0,27	0,055	2,74	0
$\mathbf{a_{20}}$ (m/s^2)	0,56	0,08	5,30	5,63	7,86	9,53	9,74	6,48	9,80
$\mathbf{t_{20}}$ (s)	16,69	2,86	2,13	2,12	2,06	2,03	2,022	2,144	2,02
$\mathbf{v_{20}}$ (m/s)	1,25	8,96	17,11	17,34	18,75	19,66	19,76	17,86	19,82
$\mathbf{h_{20}}$ (m)	2,41	12,54	18,23	18,34	19,28	19,90	19,96	18,56	20,00
"Foto finish"	8º a 17,6m	7º a 7,5 m	6º a 1,8 m	5º a 1,7 m	3º a 72 cm	2º a 10 cm	1º a 4 cm	4º a 1,4 m	récord (0 m)

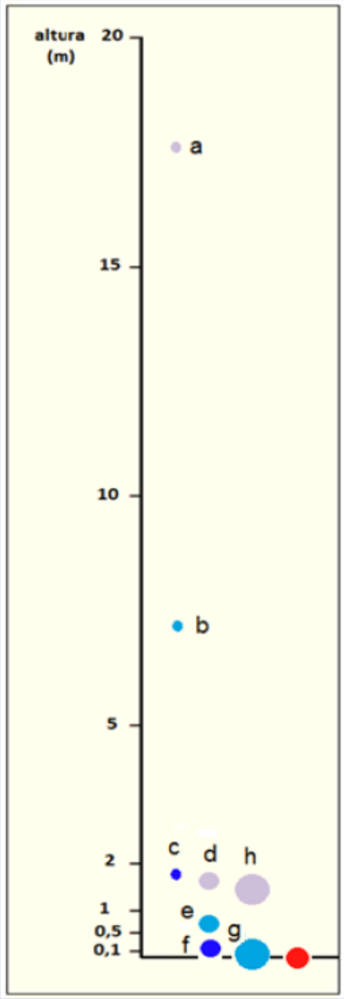
(*) Magnitudes e parámetros calculados:

$\mathbf{a_0 = g - a_e}$	Aceleración inicial = aceleración da gravidade – desaceleración do empuxe
$\mathbf{v_L}$, $\mathbf{t_L}$	Velocidade límite e tempo en alcanzar o 99% de v_L
$\mathbf{t_{20}}$, $\mathbf{v_{20}}$	Tempo e velocidade final ao caer dende 20 m
$\mathbf{a_{20}}$, $\mathbf{a_{r20}}$	Aceleración resultante e deceleración do rozamento ao caer 20 m, ($a = a_0 - a_r$)
$\mathbf{h_{20}}$	Altura descendida no tempo de caída libre dende 20 m
Foto finish	Orden de chegada nunha caída desde 20 m. Distancia ao chan no tempo da caída libre

A **figura 1** mostra como sería a "foto finish" da caída destes 8 corpos, moi diversos en tamaño e masa, nunha caída dende unha altura de 20 m. Como se pode ver, os máis densos e grandes aproxímanse bastante ben a unha caída libre no baleiro, mentres que os máis pequenos, sobre todo os máis lixeiros, ralentizan considerablemente.

Como vemos, as ecuacións do movemento deste modelo de caída real no que se basean estes cálculos xustifican e detallan mellor o que a nosa experiencia, e mesmo a nosa intuición, xa nos facía sospeitar de xeito cualitativo.

"Foto finish" da caída no ar de 8 corpos de varios tamaños e densidades



Corpos en caída, segundo densidade e tamaño	→ Densidade relativa → Moi lixeiro (d = 0,01)	Normal (d = 1)	Moi denso (d = 10)
↓ Tamaño ↓ Moi pequeno R = 0,2 cm	a boliña de porexpán	b gota de auga	c perdigón de ferro
Mediano R = 3,3 cm	d pelota de tenis	e pelota de auga	f pelota de ferro maciza
Moi grande R= 100 cm	h elefante porexpán	g elefante real	calquera corpo en caída libre

Segundo os cálculos, a "foto finish" da caída no ar dende 20 m de altura (figura da esquerda) dispararíase pola chegada ao chan de cualquera obxecto caendo libre no baleiro (en vermello). case que á vez chegarían os corpos densos máis grandes (g, f, e). Os perdedores serían con diferenza os corpos moi pequenos, e mais se son pouco densos (a, b).

Figura 1. *"Foto Finish" da caída de distintos obxectos dende 20 m de altura.*

A **figura 2** mostra as gráficas da aceleración e a velocidade fronte ao tempo que representou a folla de cálculo para os dous corpos **a** e **f** dos exemplos anteriores. Trátase das caídas no aire dun corpo grande e pesado (a pelota ou bola maciza de ferro de 1,2 kg) e doutro pequeno e lixeiro (a gota de auga de 14 mg) en comparación coa súa caída libre no baleiro. A gota perde decontado a súa aceleración inicial e alcanza axiña unha velocidade límite que é baixa, o que explica un retardo considerábel na caída real con respecto á súa caída libre no baleiro. A bola de ferro, aínda que diverxa un pouco, parécese bastante a unha caída libre con aceleración *g*.

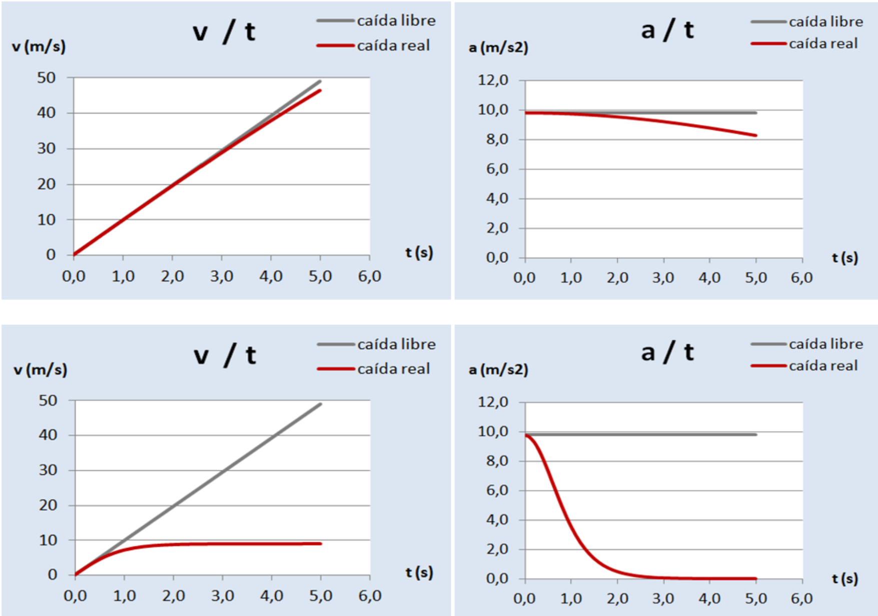


Figura 2. *Gráficas v/t e a/t calculadas para as caídas libre e real dende 100 m de altura. Arriba: bola maciza de ferro de 1 kg. Abaixo: gota de auga de 14 mg.*

4. Conclusión

Resumindo, que é o que fai que uns corpos caian máis rápido que outros?

No baleiro todos os corpos caen coa mesma aceleración constante g (9,8 m/s^2), mais este non é o caso das cousas que vemos caer ao noso arredor tódolos días. Para calquera corpo que cae polo aire, o retardo con respecto á caída libre no baleiro débese aos efectos da fricción e ao empuxe deste fluído. Na maior parte dos casos, o efecto da fricción é máis importante que o do empuxe. O retardo por rozamento é máis acusado canto maior sexa a velocidade v, menor a masa m do corpo e maior a área A da sección frontal. O efecto do empuxe é fixo e maior canto menor sexa a densidade d do corpo.

Como se pode ver nas gráficas da figura 3, a medida que un corpo descende na súa caída polo aire (liña vermella), a aceleración total diminúe a partir dun valor inicial que pode ser case igual a g (se o efecto do empuxe é insignificante) ata chegar a cero, cando a desaceleración crecente debido ao rozamento iguala á aceleración inicial. A partir dese instante e altura, o corpo continuará a súa caída con movemento uniforme, mantendo constante a velocidade límite v_L alcanzada. Esta velocidade límite alcánzase antes e é máis pequena canto menor masa e maior sección frontal teña o corpo e maior densidade teña o fluído, que no caso do aire é inversamente proporcional á temperatura.

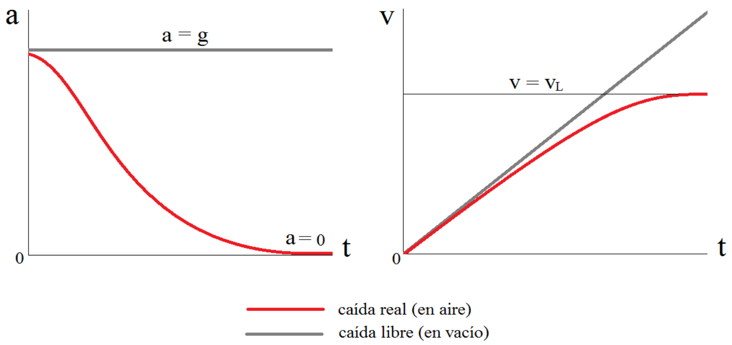


Figura 3. *Variacións da aceleración e a velocidade co tempo de caída.*

Aproximación dunha caída real a unha caída libre

A caída real dun corpo no aire aproxímase mellor a unha caída libre no baleiro coa aceleración constante da gravidade g :

- Canto máis curta é a caída (non hai tempo para que a velocidade aumente dabondo)
- Canto máis pesado é o corpo (maior masa)
- Canto máis estreito é na dimensión transversal á dirección de caída (menor sección)
- Canto máis denso é o corpo

Para ver se podemos supoñer a caída dun corpo como unha caída libre ideal coa aceleración constante da gravidade, primeiro debemos valorar se a masa, a densidade e o ancho do corpo, amais da altura ou a duración da caída van permitir facermos esta aproximación cun erro que poidamos considerar aceptábel.

Unha reflexión final

Os profesores abusamos con frecuencia do modelo de caída libre no baleiro e aplicámolo a calquera situación sen cuestionar antes se é ou non aceptábel nese caso. No fondo, parece que estamos a enviar a mensaxe de que a ciencia asegura que todo cae do mesmo xeito independentemente da súa forma, volume ou masa, agás en casos moi evidentes como unha pluma ou un paracaidista.

Ás veces, tentando afinar, adoitamos dicir que a aceleración da caída real no aire non depende da masa, sempre que o volume e a forma dos obxectos comparados sexan iguais, cousa que non é rigorosamente certa.

Non sería xusto rexeitar de entrada as evidencias que ten o alumnado sobre a caída libre de obxectos na súa contorna, apelando a que contradín as leis da física. Se cadra sería mellor ensinar a valorar criticamente en que casos podería asemellarse a unha caída libre no baleiro, e ensinar que a caída real de calquera obxecto tamén segue as leis da física, aínda que nestes casos sexan leis diferentes. Á hora de resolver un problema de caída, sería bo comparar o resultado segundo a aproximación de caída libre e o resultado da súa caída real (obtido de inmediato e sen entrar en argumentacións coa folla de cálculo), e facer unha valoración crítica da aproximación realizada. Este traballo pode servir dalgún xeito ao profesorado para dispor dunha base conceptual e dispor dunha ferramenta de cálculo útil para explicar as caídas dos corpos na vida real. E finalmente, poder comprobar que as ideas previas do alumnado moitas veces non son tan erróneas e están avaladas pola ciencia, se é que se aplica correctamente.

5. Referencias

Blown, E. J. e Bryce, T. G. K. (2013). Thought-Experiments About Gravity in the History of Science and in Research into Children's Thinking. *Science & Education*, 22(3), 419-481.

Franco, A. (2009). *Curso interactivo de Física en Internet*. http://www.cs.ehu.es

García-Verdugo, A. (2021) *Con F de física y con Q de química.* Blogger: https://confdefisyconqdequi.blogspot.com/p/recursos-y-trabajos.html

Gluck, P., Air resistance on falling balls and balls, *The Physics Theacher* 41, 178-180 (2003).

Kavanagh, C. e Sneider, C. (2006). Learning about Gravity I. Free Fall: A Guide for Teachers and Curriculum Developers. *Astronomy Education Review*, 5(2), 21-52.

Open Stax (2022). *Física universitaria.* Vol.1. https://openstax.org

Ruvalcaba Cervantes, J. M., e Quintero Zazueta, R (2022). Conocimiento docente: ¿modelar la caída libre o un modelo teórico?. *Revista de Enseñanza de la Física*, 34, 283–288.

Sánchez, M., Siete cuestiones para divulgar y comprender aspectos de la caída libre, *Latin American Journal of Physics Education* 5, 1-10 (2011).

Tipler, P., Mosca, G. (2011). *Física para la ciencia y la tecnología* 6ª ed. Vol.1. Reverté.

Young, H., Freedman, R. (2009). *Sears.Zemansky - Física Universitaria* 12ª ed. Vol. 1. Pearson.