EN TEMPOS DE PANDEMIA: MODELOS

RODRÍGUEZ MAYO, FRANCISCO MANUEL
Catedrático de secundaria en estado de xúbilo
fmrmayo@gmail.com

Resumo

Di Penrose que, en contra do que pensamos a maioría, as Matemáticas e a Física son esencialmente descritivas. Só poden facer predicións cando os fenómenos son simples.

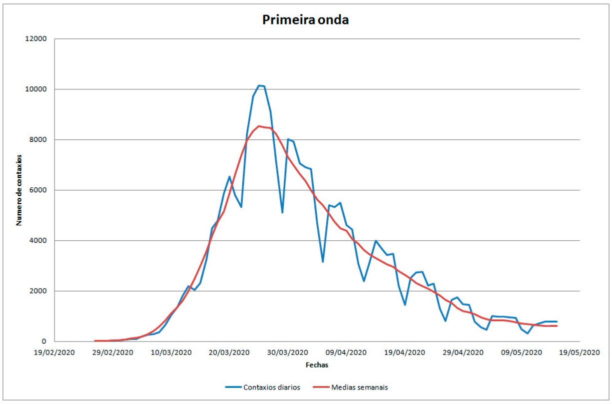
A evolución dunha pandemia non é un fenómeno simple. Son moitas as variables que inflúen e, ademais, o coñecemento da súa evolución afecta a esa mesma evolución.

Nesta ponencia intento ver como modelos matemáticos simples, comprensibles para secundaria, poden axudarnos a entender que é unha epidemia e como foi a evolución da pandemia en España.

Falemos de modelos.

Un modelo matemático é, no caso máis sinxelo, unha simple fórmula na que os valores dunha magnitude (número de infectados da covid-19 por exemplo) obtéñense a partir dos valores doutra (o tempo na pandemia e tamén en todo o que sigue[1]).

En moitas ocasións, é máis doado coñecer a variación da magnitude polo que moitos modelos empezan por facer suposicións sobre esa variación.



** Grafico cos datos oficiais do Ministerio de Sanidade.*

***A liña encarnada son os valores suavizados empregando medias semanas.*

[1] A variable tempo foi a única considerada durante a maior parte da historia da Análise Matemática.

Modelo exponencial.

Nos primeiros días de cada onda da epidemia, o número de novos contaxios mantíñase proporcional ao número de infectados. Eran momentos nos que se dicían cousas como “cada día aumenta un 10% o número de infectados” ou “duplícanse os casos cada tres días”:

Tempo	0	3	6	9	....	x	
Magnitude	b	$b\cdot 2$	$b\cdot 2\cdot 2=b\cdot 2^2$	$(b\cdot 2^2)\cdot 2=b\cdot 2^3$	....	$b\cdot 2^{\left(x/3\right)}$	

**“b” sería o número inicial de casos.*

Empezando por 1 caso e supoñendo que se duplican os casos cada tres días, ao cabo de seis meses teriamos: $f(180)=1\cdot 2^{\left(180/3\right)}=1\cdot 2^{60}\approx 1{,}15\cdot 10^{18}$ máis de un millóns de billóns de casos (a poboación española é duns $4{,}7\cdot 10^7$ e a do mundo $7\cdot 10^9$). É a consecuencia do famoso “crecemento exponencial”.

Hai moi moitos xeitos de escribir a fórmula que corresponde a unha función exponencial:

$$f(x)=b\cdot 2^{\left(x/3\right)}=b\cdot\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^x \xrightarrow{2^{\frac{1}{3}}=a} f(x)=b\cdot a^x$$

e o múmero inicial de casos.
corresponde á taxa de variación. Para un crecemento do 30% diario sería: a=1+30/100

Poden escribirse empregando a función exponencial estándar e^x :

$$f(x)=b\cdot a^x \xrightarrow{a=e^{Ln(a)}} f(x)=b\cdot\left(e^{Ln(a)}\right)^x=b\cdot e^{Ln(a)x} \xrightarrow{r=Ln(a)} f(x)=b\cdot e^{rx}$$

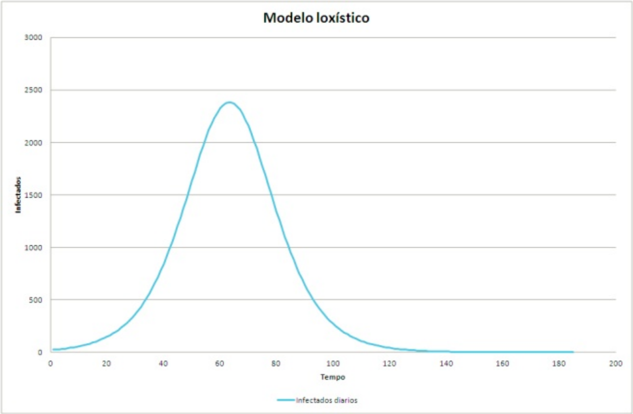
No caso das infeccións, ao principio, o modelo exponencial describe de xeito correcto a situación pero, nunha situación real, ese crecemento non pode manterse pois a poboación e limitada.

Modelo loxístico

Cando a magnitude non pode medrar ata o infinito, o modelo exponencial non pode describir axeitadamente a situación. O modelo loxístico introduce un valor máximo para a magnitude e, fai que o crecemento varíe en función da diferenza entre os infectados e ese máximo.

A función que describe este proceso sería da forma: $f(x)=\dfrac{P\cdot b\cdot e^{rx}}{P+b\left(e^{rx}-1\right)}$ Onde b, ao igual ca na exponencial, é poboación inicial, r define a taxa de crecemento e P a poboación total.

A gráfica amosa o comportamento do modelo loxístico, pero comparándoa coa da primeira onda vemos que hai notables diferenzas (ten un eixe de simetría).



Modelos dinámicos

Un modelo dinámico parte dun valor inicial e das leis de cambio, o que permite atopar a función que describe o proceso[2].

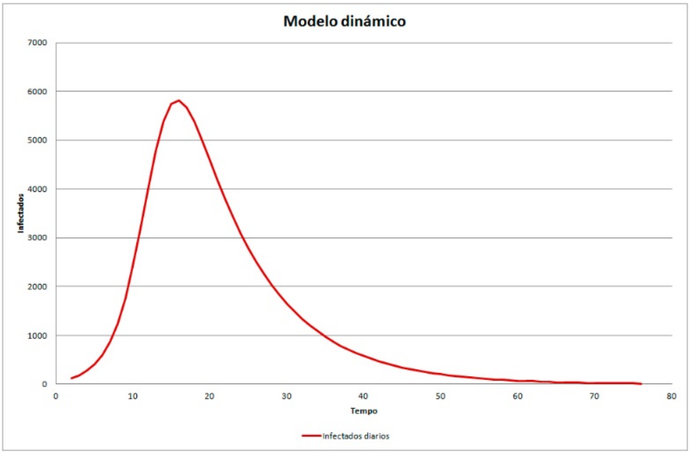
No noso caso:

1. Partimos dun certo número de persoas infectadas 250 dunha poboación de 100000.
2. Supoñemos que cada persoa mantén contactos estreitos con outras 5 e que en cada un deses contactos hai unha probabilidade 0,1 de contaxio. Así, a probabilidade de que unha persoa se contaxie nunha reunión seria:

$$p_1 = \left[1 - \left(\frac{100000 - 250}{100000}\right)^5\right] \cdot 0{,}1$$

Multiplicando por 100000 danos o número de infeccións.

Podemos levar ese proceso a unha folla de cálculo e repetir o cálculo con so arrastrar. O resultado é a gráfica que vemos, asombrosamente similar a das ondas da pandemia (agás a segunda, distorsionada porque Madrid tívoa antes, todas son semellantes a primeira).



Este modelo pode perfeccionarse engadindo mais complexidade á lei de cambio: as persoas inmunes, o período no que unha persoa é contaxiosa, etc.

[2] Con variables continuas estaríamos diante dunha ecuación diferencial.